INVERZNA MATRICA

Minor (u oznaci M_{ij}) elementa a_{ij} determinante reda n jeste determinanta matrice reda n-1 koja se dobija izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone iz date matrice.

Kofaktor (u oznaci A_{ij}) elementa a_{ij} determinante reda n definišemo sa $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$

<u>Primer</u>

Ako posmatramo matricu $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, njeni minori i kofaktori će biti:

<u>Minori</u>:

$$\boxed{M_{11}} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{12}} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{13}} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{M_{21}} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{22}} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{23}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{M_{31}} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{32}} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \boxed{M_{33}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Kako smo dobili recimo minor M_{11} ?

Oznaka 11 nam govori da poklapamo prvu vrstu i prvu kolonu: $\begin{bmatrix} \textcircled{a} & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, ono što ostane stavimo u malu determinantu.

Minor M_{12} dobijamo kad poklopimo prvu vrstu i drugu kolonu (12): $\begin{bmatrix} a_1 & \textcircled{b} & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, ostaje $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, itd.

<u>Kofaktori</u>:

$$\boxed{A_{11}} = (-1)^{1+1} M_{11} = +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{12}} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{13}} = (-1)^{1+3} M_{13} = +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{21}} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{22}} = (-1)^{2+2} M_{22} = +\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{23}} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{A_{31}} = (-1)^{3+1} M_{31} = +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{32}} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \boxed{A_{33}} = (-1)^{3+3} M_{33} = +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Sta možemo primetiti kod kofaktora što se tiče znakova?

Pa, znaci idu naizmenično, kao kad smo razvijali determinante: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Najpre ćemo reći nešto o **adjungovanoj** matrici.

Naka je data matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, ili skraćeno zapisana $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$.

Matricu $\|A_{ij}\|^T$, gde su A_{ij} kofaktori elemenata a_{ij} matrice A, nazivamo **adjungovana** (pridružena) matrica za matricu A i označavamo je sa :

$$adjA = \|A_{ij}\|^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Primer

Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Odrediti njenu adjungovanu matricu $adjA$.

Najpre tražimo kofaktore…Onda njih poredjamo u matricu…

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 2 \end{bmatrix} \to A_{11}=+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=6$$

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{3} & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix} \to A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(-2)=2$$

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{0} \\ 0 & 3 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \to A_{13}=+\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3$$

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & 2 \end{bmatrix} \to A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-10$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \boxed{5} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ 1 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix} \to A_{22}=+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ 1 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \to A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-(-5)=5$$

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 0 \\ \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{bmatrix} \to A_{31}=+\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=10$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{bmatrix} \to A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & \boxed{0} \\ 0 & 3 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{bmatrix} \to A_{33}=+\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3$$

Sad ove vrednosti menjamo u : $adjA=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, pa je $adjA=\begin{bmatrix} 6 & -10 & 10 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Sad možemo definisati i ***inverznu matricu***.

Naka je A kvadratna matrica reda n . Ako postoji matrica A^{-1} reda n takva da je $\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$, gde je I_n jedinična matrica reda n , tada kažemo da je A^{-1} inverzna matrica matrice A.

Formula po kojoj tražimo inverznu matricu je : $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot adjA}$

Naravno , treba reći da inverzna matrica postoji ako i samo ako je $\det A\neq 0$.

Inverzna matrica je, ako postoji, jedinstvena!

Primer

Odrediti inverznu matricu matrice $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{bmatrix}$

Radimo po formuli: $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot adjB$

Najpre tražimo ***det B*** , jer ta vrednost mora biti različita od nule da bi postojala inverzna matrica...

$\det B=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{vmatrix}$ koristimo Sarusov postupak...

$$\det B=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & -3\\ 4 & -5\\ 5 & -7\end{matrix}=2\cdot(-5)\cdot 3+(-3)\cdot 2\cdot 5+1\cdot 4\cdot(-7)-(-3)\cdot 4\cdot 3-2\cdot 2\cdot(-7)-1\cdot(-5)\cdot 5=$$

$$=-30-30-28+36+28+25=-88+89=1$$

$\boxed{\det B=1}$

Dalje tražimo **adj *B*.**

$$adjB=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ \boxed{4} & -5 & 2 \\ \boxed{5} & -7 & 3 \end{bmatrix} \to B_{11}=+\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}=-15-(-14)=-1$$

$$B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 4 & \boxed{-5} & 2 \\ 5 & \boxed{-7} & 3 \end{bmatrix} \to B_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-[12-10]=-2$$

$$B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 4 & -5 & \boxed{2} \\ 5 & -7 & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{13}=+\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-28-(-25)=-3$$

$$B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 4 & -5 & \boxed{2} \\ 5 & -7 & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{13}=+\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-28-(-25)=-3$$

$$B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ \boxed{5} & -7 & 3 \end{bmatrix} \to B_{21}=-\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}=-[-9-(-7)]=2$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & \boxed{-3} & 1 \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ 5 & \boxed{-7} & 3 \end{bmatrix} \to B_{22}=+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=6-5=1$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} \\ \boxed{4} & \boxed{-5} & \boxed{2} \\ 5 & -7 & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-[-14-(-15)]=-1$$

$$B=\begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 \\ \boxed{4} & -5 & 2 \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{31}=+\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}=-6-(-5)=-1$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & \boxed{-3} & 1 \\ 4 & \boxed{-5} & 2 \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} \\ 4 & -5 & \boxed{2} \\ \boxed{5} & \boxed{-7} & \boxed{3} \end{bmatrix} \to B_{33}=+\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-10-(-12)=2$$

Poredjamo kofaktore u matricu adj B.

$$adjB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$, sada se vraćamo u formulu $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot adjB$, pa je :

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Ako za matricu *A* postoji inverzna matrica, kažemo da je matrica *A* *regularna matrica*.

U protivnom, za matricu A kažemo da je **singularna** (neregularna).

Evo nekoliko pravila koja važe za regularne matrice:

1) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3) $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$

Ako za kvadratnu matricu *A* važi da je $\boxed{A^T = A^{-1}}$, onda nju nazivamo *ortogonalna* matrica.

PRIMERI

Odredi inverznu matricu matrica

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$